

# Estimation par maximum de vraisemblance de la dérivée d'un signal bruité. Application à la caractérisation de vérins pneumatiques

François AUGER<sup>1</sup>, Zoheir BOULBAIR<sup>1</sup>, Frédéric MIQUEAU<sup>2</sup>

<sup>1</sup>GE44, Bd de l'Université, BP 406, 44602 Saint Nazaire cedex, France

<sup>2</sup>MD Electronic, rue des Minais, 44340 Bouguenais, France

auger@ge44.univ-nantes.fr, boulbair@ge44.univ-nantes.fr, mdelectronic@compuserve.com

**Résumé** – Nous proposons dans cet article une nouvelle classe d'estimateurs récursifs de la dérivée de signaux échantillonnés bruités, basée sur le principe du maximum de vraisemblance.

**Abstract** – In this paper, we present a new class of velocity estimators based on the maximum likelihood principle.

## 1 Introduction

L'évaluation de la dérivée de signaux échantillonnés et bruités intervient dans de nombreuses applications pratiques du traitement du signal, que ce soit en radar, en traitement de la parole, dans les télécommunications, dans la lecture des codes à barres, dans le traitement de signaux de mesure ou en régulation de vitesse de machines électriques. Pour résoudre ce problème, plusieurs solutions ont été présentées dans la littérature. Comme on le verra au paragraphe 2, celles-ci peuvent se répartir en trois catégories. La première, de type déterministe, correspond à la synthèse de filtres dont la réponse fréquentielle s'approche le plus possible de la fonction de transfert d'un filtre dérivateur idéal  $G(\lambda) = j2\pi\lambda$ . La seconde, également de type déterministe, correspond à l'approximation d'un opérateur de dérivation  $\frac{dx}{dt}(t)$  à l'aide de valeurs du signal mesurées aux instants d'échantillonnage. La troisième catégorie, à laquelle appartient la classe des estimateurs proposée ici, est de nature statistique: elle s'appuie sur une décomposition du signal mesuré en une somme d'un bruit et d'une composante déterministe caractérisé par un modèle d'évolution simple, et dont on peut déduire aisément l'expression d'une dérivée.

Dans cet article, nous proposons une nouvelle classe d'estimateurs récursifs de la dérivée de signaux échantillonnés bruités, basée sur le principe du maximum de vraisemblance. Les estimateurs obtenus sont basés sur trois hypothèses de complexité croissante sur l'évolution du signal: mouvement à vitesse constante, à accélération constante ou à jerk constant. Dans chaque cas, les expressions des estimateurs sont accompagnées des caractéristiques statistiques des estimateurs obtenus et de leurs réponses fréquentielles. Ces estimateurs sont ensuite utilisés dans deux domaines d'application différents: le premier concerne la caractérisation de vérins pneumatiques et le second correspond à la mesure de vitesse à partir du codeur incrémental d'une machine tournante.

## 2 Un bref état de l'art

Bien évidemment, l'approche présentée au paragraphe 3 n'est pas la seule possible. Pour la replacer dans son contexte, quelques unes de autres approches possibles vont être rappelées ci-dessous.

### 2.1 Synthèse de filtres dérivateurs

Une première façon de calculer une valeur approchée de la dérivée d'un signal échantillonné consiste à utiliser un filtre à réponse impulsionnelle finie dont la réponse fréquentielle  $H(\lambda)$  s'approche le plus possible d'un filtre dérivateur idéal  $G(\lambda) = j2\pi\lambda$ . Les premières solutions de ce type peuvent être obtenues en décalant et en tronquant la transformée de Fourier inverse de  $G(\lambda)$ ,  $g[n] = \frac{\cos(n\pi)}{n}$  (voir [1], p 461). Mais du fait de la décroissance très lente de  $g[n]$ , cette technique nécessite des filtres d'ordre très élevés. D'autres filtres ont été obtenus en utilisant l'algorithme de Remez [2, 3]. Une autre méthode relevant de cette catégorie consiste à concevoir un filtre RIF de type III dont la réponse fréquentielle  $H(\lambda)$  a la même valeur et les mêmes dérivées (jusqu'à un ordre donné) que  $G(\lambda)$  à la fréquence nulle<sup>1</sup> ( $\lambda = 0$ ) ou en milieu de bande ( $\lambda = 1/4$ , soit  $f = \lambda F_e = F_e/4$ ,  $F_e$  étant la fréquence d'échantillonnage) [5, 6]. Pour éviter une amplification trop importante des bruits en haute fréquence, un comportement passe-bas peut aussi être obtenu en imposant à  $H(\lambda)$  et à quelques unes de ses dérivées successives d'être nulles en  $\lambda = 1/2$  [7]. Dans tous les cas, les filtres obtenus se déduisent de la résolution d'un système linéaire, et ont des coefficients à valeurs réelles.

Pour toutes ces approches, l'unique degré de liberté est l'ordre du filtre. Celui-ci doit être élevé pour que le module de l'écart  $|H(\lambda) - G(\lambda)|$  soit faible, mais la détermination

1. Imposer à  $H(\lambda)$  et à ses dérivées d'avoir des dérivées correctes en  $\lambda = 0$  permet d'obtenir des estimateurs sans biais de la vitesse pour des signaux ayant une trajectoire polynomiale [4].

de l'ordre *minimal* convenant pour une application donnée n'est pas évidente.

## 2.2 Approximations de l'opérateur de dérivation

Une deuxième approche possible consiste à approximer un opérateur de dérivation à l'aide d'une combinaison linéaire de valeurs du signal. Une première solution de ce type est basée sur les polynômes d'interpolation de Lagrange (voir [8], p 230). Ainsi à l'ordre 2, on peut approximer  $x(nT_e + uT_e)$  au voisinage de l'instant  $nT_e$  par le polynôme en  $u$  qui passe par  $x[n]$ ,  $x[n-1]$ , et  $x[n-2]$  en  $u = 0$ ,  $u = -1$  et  $u = -2$

$$P(u) = \frac{(u+1)(u+2)}{2} x[n] - u(u+2) x[n-1] + \frac{u(u+1)}{2} x[n-2],$$

où  $T_e$  est la période d'échantillonnage et  $x[n] = x(nT_e)$ . La valeur en  $u = 0$  de la dérivée  $P'(u)$  constitue alors une valeur approchée de  $T_e \frac{dx}{dt}(nT_e)$

$$P'(0) = \frac{3}{2} x[n] - 2x[n-1] + \frac{1}{2} x[n-2] \approx T_e \frac{dx}{dt}(nT_e) \quad (1)$$

Ce raisonnement peut être appliqué à des ordres plus élevés, et à des filtres non-causaux.

Une deuxième technique de ce type est basée sur des développements limités de Taylor (voir [9] p 294). Si par exemple on suppose que le signal  $x(t)$  peut être correctement approximé à l'instant  $nT_e$  par un développement limité au deuxième ordre sur l'intervalle  $[(n-2)T_e, nT_e]$ :

$$x(nT_e + \tau) \approx x(nT_e) + \frac{dx}{dt}(nT_e) \tau + \frac{d^2x}{dt^2}(nT_e) \frac{\tau^2}{2} \quad (2)$$

On obtient alors un système de 2 équations à deux inconnues en prenant  $\tau = -T_e$  et  $\tau = -2T_e$ :

$$\begin{aligned} x[n-1] &\approx x[n] - \frac{dx}{dt}(nT_e) T_e + \frac{d^2x}{dt^2}(nT_e) \frac{T_e^2}{2} \\ x[n-2] &\approx x[n] - 2 \frac{dx}{dt}(nT_e) T_e + 4 \frac{d^2x}{dt^2}(nT_e) \frac{T_e^2}{2} \end{aligned}$$

La résolution de ce système conduit pour  $\frac{dx}{dt}(nT_e) T_e$  à l'expression déjà donnée<sup>2</sup> en 1, et pour la dérivée seconde à l'expression bien connue:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(nT_e) T_e^2 \approx x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] \quad (3)$$

L'opérateur 1 obtenu correspond à une *différence arrière* d'ordre 2. En prenant  $\tau = -T_e$  et  $\tau = +T_e$  dans 2, on obtient une *différence centrée*, et en prenant  $\tau = T_e$  et  $\tau = 2T_e$ , une *différence avant* [9]. Le tableau 1.a présente les estimateurs de vitesse obtenus en fonction de l'ordre du développement limité. On peut remarquer que ces estimateurs ont des coefficients *rationnels*, ce qui permet de les mettre en œuvre efficacement sur des micro-contrôleurs à faible coût. Mais dans cette approche, le nombre de points sur lesquels est réalisée l'estimation de vitesse est égale à l'ordre du développement de Taylor ou du polynôme d'interpolation de Lagrange. Choisir un ordre élevé pour tenter de réduire la variance de l'estimation de vitesse d'un signal bruité conduit à autoriser la trajectoire du signal à suivre un polynôme d'ordre élevé, ce qui n'est pas nécessairement adapté.

2. Les polynômes de Lagrange et les développements de Taylor correspondant tous les deux à des modèles polynomiaux du signal, ce résultat n'a rien d'étonnant.

TAB. 1: Opérateurs de différence arrière d'ordre 1 à 4

(a) Opérateurs de différence arrière	
$n$	$\hat{v}[k] T_e$
1	$x[k] - x[k-1]$
2	$\frac{1}{2} (3x[k] - 4x[k-1] + x[k-2])$
3	$\frac{1}{6} (11x[k] - 18x[k-1] + 9x[k-2] - 2x[k-3])$
4	$\frac{1}{12} (25x[k] - 48x[k-1] + 36x[k-2] - 16x[k-3] + 3x[k-4])$
(b) Mouvement à vitesse constante	
$n$	$\hat{v}[k] T_e$
1	$x[k] - x[k-1]$
2	$\frac{1}{5} (3x[k] - x[k-1] - 2x[k-2])$
3	$\frac{1}{14} (6x[k] - x[k-1] - 2x[k-2] - 3x[k-3])$
4	$\frac{1}{30} (10x[k] - x[k-1] - 2x[k-2] - 3x[k-3] - 4x[k-4])$
(c) Mouvement à accélération constante	
$n$	$\hat{v}[k] T_e$
2	$\frac{1}{2} (3x[k] - 4x[k-1] + x[k-2])$
3	$\frac{1}{38} (42x[k] - 31x[k-1] - 26x[k-2] + 15x[k-3])$

## 2.3 Approches statistiques

Dans des applications concrètes, les problèmes d'estimation de vitesse sont plus souvent dus à la présence de bruits dans les signaux de mesure qu'à des problèmes de dynamique d'évolution. Les mouvements observés sont relativement lents, mais ils sont mesurés avec des capteurs qui se comportent comme des sources de bruit importantes. Il semble donc approprié de considérer ce problème comme un champ d'application possible de la théorie de l'estimation.

Une première approche possible consiste à considérer les paramètres inconnus (vitesse, accélération ...) comme des variables aléatoires. Si on suppose que le signal mesuré  $x(t)$  est la somme d'un bruit  $w(t)$  (centré et de variance  $r$ ) et d'une trajectoire  $m(t)$  à accélération constante, des développements limités à l'ordre 3, 2 et 1 de la position  $p(t)$ , de la vitesse  $v(t)$  et de l'accélération  $\gamma(t)$  autour de l'instant  $t = kT_e$  conduisent au modèle d'état [10]

$$\begin{aligned} X[k+1] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X[k] + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \delta[k] T_e^3 \\ x[k+1] &= (1 \ 0 \ 0) X[k+1] + w[k+1], \\ X[k]^T &= (p[k] \ v[k] T_e \ \gamma[k] T_e^2) \end{aligned}$$

où  $\delta[k] = \frac{d^3p}{dt^3}(kT_e)$  est le *jerk*, considéré comme une variable aléatoire centrée de variance  $q$ . Le filtre de Kalman stationnaire [11, 12, 13] conçu sur ce modèle fournira une estimation conjointe de la position, de la vitesse et de l'accélération, paramétrée uniquement par le rapport  $\frac{q}{r}$ .

## 3 Estimation par maximum de vraisemblance

La méthode proposée constitue une deuxième approche statistique, et correspond à une extension de la deuxième technique du paragraphe 2.2. Dans l'exemple donné (éq. 2), les solutions obtenues pour les 2 paramètres inconnus (vitesse, accélération) à partir de 2 équations s'avèrent inutilisables dans des situations réelles en présence de bruit. Il semble donc nécessaire d'estimer ces deux paramètres à l'aide d'un système sur-déterminé d'équations, afin de réduire la variance de l'erreur d'estimation. Ceci implique

donc de faire la différence entre le nombre de points sur lesquels est réalisée l'estimation et le nombre de degrés de liberté de la trajectoire du signal, que l'on va supposer faible. Contrairement à l'approche décrite au paragraphe 2.3, les paramètres de cette trajectoire seront considérés comme des grandeurs déterministes inconnues.

### 3.1 Mouvement à vitesse constante

Ce premier cas, particulièrement simple, va permettre de présenter clairement la démarche proposée. On suppose en effet que sur un intervalle de validité d'hypothèse de largeur  $T = NT_e$  (avec  $N \geq 1$ ), le signal mesuré peut être correctement approximé par son développement de Taylor au premier ordre :

$$x(t - \tau) = x(t) - \frac{dx}{dt}(t)\tau + w(t - \tau), \quad \forall \tau \in [0; T]$$

où l'erreur de modélisation  $w(t)$  est considérée comme un bruit centré et stationnaire. Après échantillonnage à la période  $T_e$ , cette équation conduit à

$$x[k - n] = x[k] - n v[k] T_e + w[k - n]$$

$$\text{soit } x[k - n] - x[k] = -n v[k] T_e + w[k - n]$$

avec  $t = kT_e$ ,  $x[k] = x(kT_e)$ ,  $v[k] = \frac{dx}{dt}(kT_e)$  et  $w[k] = w(kT_e)$ . L'ensemble de toutes les équations obtenues en faisant varier  $n$  de 1 à  $N$  conduit à une écriture matricielle de la forme  $Y = H X + W$ , avec

$$Y = \begin{bmatrix} x[k-1]-x[k] \\ x[k-2]-x[k] \\ \vdots \\ x[k-N]-x[k] \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ \vdots \\ -N \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w[k-1] \\ w[k-2] \\ \vdots \\ w[k-N] \end{bmatrix},$$

et  $X = v[k] T_e$ . L'estimateur de maximum de vraisemblance [14] de la dérivée  $v[k]$  du signal, obtenu sous hypothèse de bruit blanc gaussien est alors

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{v}[k] T_e = (H^T H)^{-1} H^T Y \\ &= \left( P_1 x[k] - \sum_{n=1}^N n x[k - n] \right) / P_2 \\ &= \frac{3}{2N+1} x[k] - \frac{6}{N(N+1)(2N+1)} \sum_{n=1}^N n x[k - n] \end{aligned} \quad (4)$$

avec  $P_1 = \sum_{n=1}^N n = N(N+1)/2$  et  $P_2 = \sum_{n=1}^N n^2 = N(N+1)(2N+1)/6$ . Le tableau 1.b présente les estimateurs de vitesse obtenus en fonction de  $N$ . Dans les conditions précisées sur le bruit  $w[k]$ , cet estimateur est non biaisé et sa variance décroît en  $1/N^2$  :

$$\text{Var} [\hat{v}[k] T_e] = \sigma_w^2 (H^T H)^{-1} = \frac{\sigma_w^2}{P_2} \quad (5)$$

Il a la structure d'un filtre à réponse impulsionnelle finie à phase non linéaire, dont le gain statique est nul et le gain en variance décroît en  $1/N^3$ .

$$\frac{P_1^2 + P_2}{P_2^2} = \frac{3(N+2)(3N+1)}{N(N+1)(2N+1)^2}$$

L'ordre  $N$  de l'estimateur doit donc être choisi pour trouver un compromis entre la variance des fluctuations de la vitesse estimée et la validité de l'hypothèse de mouvement à vitesse constante dans l'intervalle  $[t - NT_e; t]$ .

### 3.2 Mouvement à accélération constante

Dans ce deuxième cas, on suppose que le signal mesuré peut être correctement approximé par son développement de Taylor au second ordre :

$$x(t - \tau) = x(t) - \frac{dx}{dt}(t)\tau + \frac{d^2x}{dt^2}(t) \frac{\tau^2}{2} + w(t - \tau), \quad \forall \tau \in [0; T]$$

avec  $T = NT_e$  et  $N \geq 2$ . Après échantillonnage, cette nouvelle équation devient

$$x[k - n] = x[k] - n v[k] T_e + n^2 \frac{\gamma[k] T_e^2}{2} + w[k - n],$$

avec  $\gamma[k] = \frac{d^2x}{dt^2}(kT_e)$ . L'ensemble de toutes les équations obtenues en faisant varier  $n$  de 1 à  $N$  conduit à une écriture matricielle de la forme  $Y = H X + W$ , avec

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ -N & N^2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} v[k] T_e \\ \frac{\gamma[k] T_e^2}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{bmatrix} w[k-1] \\ w[k-2] \\ \vdots \\ w[k-N] \end{bmatrix}$$

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, l'estimateur obtenu dans ce deuxième cas s'écrit

$$\hat{v}[k] T_e = \frac{(P_1 P_4 - P_2 P_3) x[k] + \sum_{n=1}^N (P_3 n^2 - P_4 n) x[k - n]}{P_2 P_4 - P_3^2},$$

avec  $P_3 = \sum_{n=1}^N n^3 = N^2(N+1)^2/4$  et  $P_4 = \sum_{n=1}^N n^4 = N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)/30$ . La variance de cet estimateur, égale à  $\frac{\sigma_w^2 P_4}{P_2 P_4 - P_3^2}$  décroît lui aussi en  $1/N^3$ . Le tableau 1.c présente les estimateurs de vitesse obtenus en fonction de  $N$ . On peut vérifier que ces filtres ont eux aussi un gain statique nul, et leur gain en variance, calculé avec `mupad`, décroît en  $1/N^2$ . Cet estimateur de vitesse peut être associé à un estimateur d'accélération

$$\frac{\hat{\gamma}[k] T_e^2}{2} = \frac{(P_1 P_3 - P_2^2) x[k] + \sum_{n=1}^N (P_2 n^2 - P_3 n) x[k - n]}{P_2 P_4 - P_3^2},$$

Dont la variance, égale à  $\frac{P_2}{P_2 P_4 - P_3^2}$ , décroît en  $1/N^5$ .

### 3.3 Mouvement à jerk constant

Le dernier cas considéré correspond à un développement de Taylor au troisième ordre :

$$x(t - \tau) = x(t) - \frac{dx}{dt}(t)\tau + \frac{d^2x}{dt^2}(t) \frac{\tau^2}{2} - \frac{d^3x}{dt^3}(t) \frac{\tau^3}{6} + w(t - \tau),$$

avec  $\tau \in [0; T]$ ,  $T = NT_e$  et  $N \geq 3$ . En se basant sur la même technique de synthèse que dans les deux paragraphes précédents, on obtient un nouvel estimateur de vitesse

$$\begin{aligned} \hat{v}[k] T_e &= \frac{P_1 (P_5^2 - P_4 P_6) - P_2 (P_4 P_5 - P_3 P_6) + P_3 (P_4^2 - P_3 P_5)}{P_4^3 + P_2 P_5^2 + P_3^2 P_6 - P_2 P_4 P_6 - 2 P_3 P_4 P_5} x[k] \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{(P_5^2 - P_4 P_6) n - (P_4 P_5 - P_3 P_6) n^2 + (P_4^2 - P_3 P_5) n^3}{P_4^3 + P_2 P_5^2 + P_3^2 P_6 - P_2 P_4 P_6 - 2 P_3 P_4 P_5} x[k - n] \end{aligned} \quad (6)$$

avec  $P_5 = \sum_{n=1}^N n^5 = N^2(N+1)^2(2N^2+2N-1)/12$  et  $P_6 = \sum_{n=1}^N n^6 = N(N+1)(2N+1)(3N^4+6N^3-3N+1)/42$ . Sa variance, égale à

$$\frac{\sigma_w^2 (P_5^2 - P_4 P_6)}{P_4^3 + P_2 P_5^2 + P_3^2 P_6 - P_2 P_4 P_6 - 2 P_3 P_4 P_5}$$

décroît toujours en  $1/N^3$ . Des estimateurs de l'accélération et du jerk, ainsi que leur variance, peuvent être également donnés.

## 4 Des applications

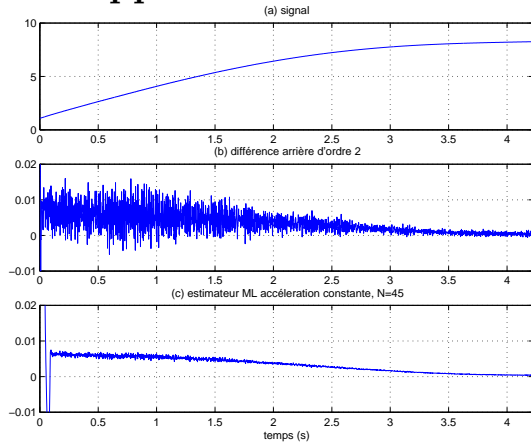


FIG. 1: Signal réel de mesure de pression, et estimation de sa dérivée.

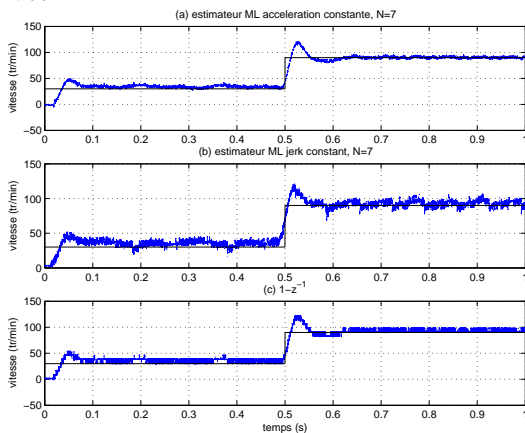


FIG. 2: Réponse du moteur à courant continu à des échelons de vitesse.

L'utilisation des estimateurs proposés a été testée dans deux domaines d'application différents. Le premier correspond à la caractérisation d'un servo-distributeur pneumatique [15]. Le fonctionnement de ces vérins est régi par la loi physique d'évolution thermodynamique de l'air dans un volume fixe,  $\frac{dm}{dt}(t) = \frac{V}{krT_r} \frac{dP_v}{dt}(t)$ , où  $\frac{dm}{dt}(t)$  est le débit massique de l'air circulant à l'entrée du servo-distributeur,  $P_v(t)$  est la pression absolue dans le volume de remplissage,  $k$  est le coefficient polytropique de l'air,  $r$  est la constante des gaz parfaits relative à l'unité de masse d'air,  $T_r$  est la température de l'air entrant et  $V$  est le volume de remplissage. Dériver le signal de mesure de pression permet donc de mesurer indirectement le débit massique sans utiliser de débitmètre. La figure 1.a montre le signal de pression mesuré. La variation importante de ce signal ne permet pas de voir l'importance du bruit de mesure. La figure 1.b montre l'estimation de dérivée obtenue par une différence finie d'ordre 2 (expression 1). Les fluctuations trop importantes de cette estimation ne permettent pas son utilisation dans des traitements ultérieurs. La figure 1.c montre le résultat obtenu par un estimateur basé sur une hypothèse de mouvement à accélération constante, avec  $N = 45$ . Les possibilités d'utilisation pratique de ce résultat semblent bien supérieures, du fait de la diminution importante des fluctuations, ce qui montre l'intérêt

de la séparation entre l'ordre du modèle et la largeur de l'intervalle de stationnarité.

Ce type d'estimateur a aussi été utilisé pour faire de la régulation de vitesse d'un moteur à courant continu. À partir des signaux fournis par un codeur incrémental ayant une résolution de 12 bits, un estimateur de vitesse basé sur une hypothèse de mouvement à accélération constante avec  $N = 7$  a été implanté sur un FPGA [16], associé à une régulation en cascade de la vitesse et du courant [17]. L'estimateur a été implanté en virgule fixe sur 17 bits, avec une fréquence d'échantillonnage de 4096 Hz. Les résultats obtenus (voir fig. 2.a) sont particulièrement intéressants à faible vitesse, où l'opérateur de différence arrière d'ordre 1, classiquement utilisé [18], présente un bruit de quantification important (fig. 2.c). Un estimateur de même longueur basé sur une hypothèse de *jerk* constant présente par contre des fluctuations plus importantes (fig. 2.b), du fait de sa plus forte variance. Des résultats complémentaires sont disponibles à l'adresse <http://crttsn.univ-nantes.fr/~auger/publis.html>.

## Références

- [1] A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer. *Discrete-time signal processing* Prentice-Hall, 1989.
- [2] L.R. Rabiner, R.W. Schaffer. *On the behavior of minimax relative error FIR digital differentiators*. Bell System Technical Journal, Vol 53, pp 333–361, 1974.
- [3] L. R. Rabiner, J. H. McClellan, and T. W. Parks. *FIR digital filter design techniques using weighted Chebyshev approximation*. Proc. IEEE, Vol 63 No 4, pp595–610, April 1975.
- [4] O. Vainio, M. Renfors, T. Saramäki. *Recursive implementation of FIR differentiators with optimum noise attenuation*. IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. 46, pp. 1202–1207, octobre 1997.
- [5] B. Kumar and S. C. Dutta Roy. *Design of efficient FIR digital differentiators and Hilbert transformers for midband frequency ranges*. Int. J. Circuit Theory Appl., Vol 17, pp 483–488, 1989.
- [6] J. Le Bihan. *Coefficients of FIR digital differentiators and Hilbert transformers for midband frequencies*. IEEE Trans. on Circuits and Systems II, Vol 43, No 3, pp 272–274, March 1996.
- [7] I.W. Selesnick. *Maximally Flat Lowpass Digital Differentiators*. IEEE Transactions on Circuits and Systems - II: Analog and Digital Signal Processing, Vol 49, No 3, pp 219–223, Mars 2002.
- [8] R. Théodor. *Initiation à l'analyse numérique*. Masson, 1994.
- [9] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*. Éditions de l'École Polytechnique de Montréal (diffusion Lavoisier), 1995.
- [10] J. Tan, N. Kyriakopoulos. *Implementation of a tracking Kalman filter on a digital signal processor*. IEEE Trans on Industrial Electronics, Vol 35, No 1, février 1988.
- [11] M.S. Grewal, A.P. Andrews. *Kalman filtering, theory and practice*. Prentice Hall, 1995.
- [12] B. Friedland. *Optimum steady-state position and velocity estimation using noisy sampled position data*. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol 9, No 6, nov 1973.
- [13] M. Hilairet, F. Auger, M. Ait-Ahmed, M.F. Benkhoris. *Speed and position estimation from an absolute position encoder by stochastic filtering*. proc. Electrimacs'99, pp II-217–222, 1999.
- [14] S.M. Kay, *Fundamentals of statistical signal processing: estimation theory*. Prentice Hall, 1993.
- [15] X. Brun, D. Thomasset, E. Bideaux. *Influence of the process design on the control strategy: application in electropneumatic field*. Control Engineering Practice, Vol 10, pp 727–735, 2002.
- [16] U. Meyer-Bases. *Digital signal processing with field programmable gate arrays*. Springer, 2001.
- [17] C. Guibert, Z. Boulbair, F. Auger, L. Loron. *Design and implementation of digital controllers on FPGA devices*. proc. IFAC Workshop on Programmable Devices and Systems, Ostrava, 2003.
- [18] R.H. Brown, S.C. Schneider, M.G. Mulligan, *Analysis of algorithms for velocity estimation from discrete position versus time data*. IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol 39, No 1, pp 11–19, Feb 1992.